הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה

יום שלישי ז' באדר תשס"ט
03/03/09

משוואות דיפרנציאליות רגילות / ח' - 104131
פתרון הבחינה מועד א' סמסטר חורף תשס"ט

פרטי הסטודנט/ית:

שם משפחה: ..... **שם פרטי**: .....

מספר זהות: ..... **פקולטה**: .....

הוראות:

- משך הבחינה : 3 שעות.
- חומר עזר: אין להשתמש בשום חומר עזר.
- יש לענות על כל השאלות בטופס הבחינה. המחברת תשמש כטיוטה בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1:

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\left(y^4 - 2x^3 \cdot y\right)dx + \left(x^4 - 2x \cdot y^3\right)dy = 0$$

למשוואה גורם אינטגרציה מהצורה הבאה: $\mu(x, y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$

ערכו של $\frac{\alpha}{\beta}$ הוא:

א. $\frac{1}{3}$

ב. -2

ג. 0

ד. 1

ה. 4

פתרון:

$$\left(y^4 - 2x^3 \cdot y\right)dx + \left(x^4 - 2x \cdot y^3\right)dy = 0$$

$$M = y^4 - 2x^3 y \to M_y = 4y^3 - 2x^3$$

$$N = x^4 - 2xy^3 \to N_x = 4x^3 - 2y^3$$

$$M_y \neq N_x$$

$$\mu = x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$$

$$\widetilde{M} \equiv M \cdot \mu \to \widetilde{M}'_y = (\beta + 4)y^{\beta+3} \cdot x^{\alpha} - 2(\beta + 1)x^{\alpha+3} \cdot y^{\beta}$$

$$\widetilde{N} \equiv N \cdot \mu \to \widetilde{N}'_x = (\alpha + 4)x^{\alpha+3}y^{\beta} - 2(\alpha + 1)x^{\alpha} \cdot y^{\beta+3}$$

$$\Rightarrow \widetilde{M}'_y = \widetilde{N}'_x$$

$$\to \begin{cases} \alpha + 2\beta = -6 \\ \beta + 2\alpha = -6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = -2 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

שאלה 2:

נתונה משפחת העקומות הבאה:

$$y^2 = x^2 \cdot (1 - c \cdot x)$$

ידוע כי אחת מהעקומות האורטוגונליות למשפחה הנ"ל עוברת דרך הנקודה $(1,1)$.
עקומה זו עוברת גם דרך הנקודה:

א. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ב. $(2,2)$

ג. $(4,4)$

ד. $(4,3\frac{1}{2})$

ה. $(5,5)$

פתרון:

$$y^2 = x^2 \cdot (1 - c \cdot x)$$

$$2yy' = 2x(1 - cx) - cx^2$$

$$y' = \frac{-x + 3 \cdot \frac{y^2}{x}}{2y}$$

$$\rightarrow y'_{\perp} = -\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x - 3\frac{y^2}{x}} = \frac{2yx}{x^2 - 3y^2}$$

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x} \equiv v \rightarrow y' = v + x \cdot v'$$

$$v + x \cdot v' = \frac{2v}{1 - 3v^2}$$

$$\frac{1 - 3v^2}{v + 3v^3} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \frac{v}{1 + 3v^2} = xc \rightarrow x^2 + 3y^2 = cy$$

$$(1,1) \rightarrow c = 4 \rightarrow x^2 + 3y^2 = 4y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

שאלה 3:

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$y'' - 3 \cdot y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

נתון כי פתרון המשוואה מקיים:

$$\begin{cases} y(0) = \ln(4) \\ y'(0) = \ln(8) \end{cases}$$

ערכו של הפתרון בנקודה $x = 1$ הוא:

א. הפתרון לא מוגדר בנקודה זו.

ב. $y = e \cdot (1-e) \cdot \ln(1+e^{-1})$

ג. $y = (1+e) + e \cdot \ln(1-e^{-1})$

ד. $y = e^{-1}$

ה. $y = e \cdot (-1+e) + e \cdot (1+e) \cdot \ln(1+e^{-1})$

פתרון:

ראשית נתחיל לטפל במשוואה ההומוגנית:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$
$$r_{1,2} = 1,2$$
$$u(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$$

קיבלנו למעשה את הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית.
נרצה כעת לקבל את הפתרון הפרטי למשוואה האי - הומוגנית. נקבל פתרון זה בשיטת וריאציית הפרמטרים:

$$y_p = c_1(x) \cdot e^x + c_2(x) \cdot e^{2x}$$
$$\rightarrow \begin{cases} c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) \cdot e^x + 2c_2'(x) e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \end{cases}$$

נפתור את האינטגרלים ונקבל:

$$c_1(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$
$$c_2(x) = e^{-x} + \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

כאן נקבל כי הפתרון הכללי של המשוואה האי הומוגנית הוא:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + \left(e^{x} + e^{2x}\right) \cdot \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$c_1 = -1$$
$$c_2 = 1$$

מכאן נקבל כי הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p(x) = -e^{x} + e^{2x} + \left(e^{x} + e^{2x}\right) \cdot \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$
$$\rightarrow y_p(1) = e(e-1) + e(e+1) \cdot \ln\left(1 + e^{-1}\right)$$

<u>שאלה 4:</u>

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$2x^2 \cdot y'' + 7x \cdot (x+1) \cdot y' - 3y = 0$$

נתון כי המקדמים הראשונים a_0, b_0, השייכים לשני הפתרונות הטוריים סביב $x = 0$, של המשוואה שווים לאחד.
הפתרון הפרטי למשוואה, כאשר מכל פתרון ניקח את שלושת המחוברים הראשונים <u>בלבד</u> נתון ע"י:

א. $y = x \cdot \left(1 + x + x^2\right) + x^3 \cdot \left(2 - \frac{21}{5}x + x^2\right)$

ב. $y = \sqrt{x} \cdot \left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792} \cdot x^2\right) + x^{-3} \cdot \left(1 - \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2\right)$

ג. $y = \sqrt{x} \cdot \left(1 + \frac{17}{18}x + x^2\right) + x^{-2} \cdot \left(1 + \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2\right)$

ד. $y = \left(1 - x + 2 \cdot x^2\right) + x^2 \cdot \left(1 - x + \frac{49}{5}x^2\right)$

ה. $y = \left(1 + \frac{7}{18}x - x^3\right) + x \cdot \left(1 + \frac{21}{5}x + x^2\right)$

<u>פתרון:</u>

המשוואה האופיינית נתונה ע"י:

$$2r(r-1)+7r-3=0$$
$$r_1=\tfrac{1}{2}$$
$$r_2=-3$$

נציע לכל שורש פתרונות מהצורה:

$$y=x^r\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$$

נקבל את נוסחאות הרקורסיה הבאות עבור כל שורש:

$$a_n=\frac{-7(n+r-1)}{[2(n+r)-1]\cdot[n+r+3]}\cdot a_{n-1}$$
$$a_0=1$$

מכאן מתקבל כי:

$$y=\sqrt{x}\cdot\left(1-\tfrac{7}{18}x+\tfrac{147}{792}\cdot x^2\right)+x^{-3}\cdot\left(1-\tfrac{21}{5}x+\tfrac{49}{5}x^2\right)$$

<u>שאלה 5:</u>

נתונה המערכת האי הומוגנית הבאה:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1+x_2+3\cdot e^{\alpha\cdot t}$$
$$\frac{dx_2}{dt}=4x_1+x_2-6\cdot e^{\alpha\cdot t}$$

כאשר $\alpha\neq-1$.

למערכת הנ"ל יש פתרון המקיים: $x(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

אזי ערכו של פתרון זה בנקודה $t=1$ הוא:

א. $e^{2\cdot\alpha}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

ב. $\left(e^{-\alpha+2}+1\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

ג. $\left(e^{-\alpha+1}+1\right)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

ד. $\frac{3}{(\alpha+1)\cdot e}\cdot\left(e^{\alpha+1}-1\right)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

ה. $\left(e^{-\alpha}+1\right)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u>

נתחיל במציאת הפתרון של המערכת ההומוגנית.
מטריצת המקדמים היא:

$$\begin{pmatrix}11\\41\end{pmatrix}.$$

הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים הם:

$$\lambda_{1,2}=-1,3$$

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית הוא:

$$x_H=C_1\cdot e^{-t}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2\cdot e^{3\cdot t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

את הפתרון הפרטי נקבל בשיטת וריאציית הפרמטרים:

$$\begin{cases}C_1'\cdot e^{-t}+C_2'\cdot e^{3t}=3\cdot e^{\alpha\cdot t}\\C_1'\cdot\left(-2e^{-t}\right)+C_2'\cdot\left(2e^{3\cdot t}\right)=-6\cdot e^{\alpha\cdot t}\end{cases}$$

נפתור מערכת משוואות זו ונקבל לאחר אינטגרציה כי:

$$C_2=0$$
$$C_1=\frac{3}{\alpha+1}\cdot e^{(\alpha+1)\cdot t}$$

כעת הפתרון הפרטי הוא:

$$x_p=\frac{3}{\alpha+1}\cdot e^{\alpha\cdot t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי של האי הומוגני הוא:

$$x(t)=C_1\cdot e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2\cdot e^{3\cdot t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{3}{\alpha+1}\cdot e^{\alpha\cdot t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$C_2 = 0$$
$$C_1 = \frac{-3}{\alpha+1}$$

מכאן נקבל את הפתרון הפרטי:

$$x = \frac{3}{\alpha+1} \cdot (e^{\alpha \cdot t} - e^{-t}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

מכאן ברור כי בהצבה של $t = 1$ נקבל כי:

$$x(1) = \frac{3}{(\alpha+1) \cdot e} \left(e^{\alpha+1} - 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6:</u>

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$y' + y = u_0(t) - u_2(t)$$

יהי $y(x)$ פתרון המקיים את תנאי ההתחלה: $y(0) = 0$, אזי $y(1)$ נתון ע"י:

א. $1 - e^{-1}$

ב. 0

ג. e^{-2}

ד. $\frac{7}{e}$

ה. $e^2 - 10$

<u>פתרון:</u>

נבצע התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$L(y')+L(y)=L(u_0)-L(u_2)$$
$$pL(y)-y(0)+L(y)=\tfrac{1}{p}-\tfrac{e^{-2p}}{p}$$
$$L(y)=\tfrac{1-e^{-2p}}{p(p+1)}$$
$$L(y)=\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p+1}\right)-e^{-2p}\cdot\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p+1}\right)$$

נבצע התמרה הפוכה ונקבל:

$$y=1-e^{-t}-u_2\cdot\left(1-e^{2-t}\right)$$
$$\Rightarrow y(1)=1-e^{-1}$$

<u>שאלה 7:</u>

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$y''-7\cdot y'=(3-36x)\cdot e^{4x}$$

יהי $y(x)$ פתרון המשוואה המקיים: $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

אזי ערכו של $y(1)$ נתון ע"י:

א. $3\cdot\left(1+e^{7}\right)$

ב. $\frac{2}{7}\left(1+e^{7}\right)+e^{4}$

ג. $\frac{2}{7}\left(1-e^{7}\right)+3\cdot e^{4}$

ד. $7\cdot\left(1-e^{-7}\right)+3\cdot e^{-4}$

ה. $\frac{1}{8}\cdot\left(1+3e^{7}\right)+6\cdot e^{4}$

<u>פתרון:</u>

נתחיל לטפל במשוואה ההומוגנית:

$$y''-7\cdot y'=0$$
$$r^2-7\cdot r=0$$
$$r_{1,2}=0,7$$
$$y_H=C_1+C_2\cdot e^{7x}$$

כעת נרצה לקבל את הפתרון הפרטי:

הריבוי של $\alpha=4$ כשורש של הפולינום האופייני הוא אפס.

ולכן צורת הפתרון הפרטי היא: $y_p = (Ax+B)\cdot e^{4x}$

נציב פתרון זה במשוואה ונבצע השוואת מקדמים על מנת לקבל את הקבועים:

$$A = 3$$
$$B = 0$$
$$\rightarrow y_p = 3x\cdot e^{4x}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 + C_2\cdot e^{7x} + 3x\cdot e^{4x}$$

כעת נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$C_1 = -C_2 = \tfrac{2}{7}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = \tfrac{2}{7}\left(1-e^{7x}\right) + 3x\cdot e^{4x}$$

<u>שאלה 8:</u>

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$y' = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$$

ידוע כי אחד מהפתרונות הפרטיים עובר דרך הנקודה $(1,1)$.

פתרון זה יעבור גם דרך הנקודה:

א. $\left(\tfrac{13}{9},-\tfrac{13}{9}\right)$

ב. $(0,0)$

ג. $(1,10)$

ד. $(1,-1)$

ה. $\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)$

פתרון:

מדובר במשוואה דיפרנציאלית שהיא מנת ישרים שאינם נחתכים בראשית.

נקודת החיתוך ביניהם היא:

$$(1,-2)$$

נגדיר כעת:

$$\bar{x} \equiv x-1$$
$$y \equiv y+2$$
$$\rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{2(\bar{y}-2)-(x+1)+5}{2(\bar{x}+1)-(\bar{y}-2)-4} = \frac{2\bar{y}-\bar{x}}{2\bar{x}-\bar{y}}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{2\frac{\bar{y}}{\bar{x}}-1}{2-\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}$$

נגדיר כעת:

$$v \equiv \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \rightarrow \bar{y}' = v + v'\bar{x}$$

נציב זאת במשוואה האחרונה ונבצע הפרדת משתנים, נקבל לבסוף:

$$\frac{2-v}{(v+1)(v-1)}dv = \frac{d\bar{x}}{\bar{x}}$$

$$\int\left[\frac{1}{2}\frac{1}{v-1} - \frac{3}{2}\frac{1}{v+1}\right]dv = \ln\bar{x} + C$$

$$\frac{1}{2}\ln(v-1) - \frac{3}{2}\ln(v+1) = \ln\bar{x} + C$$

נחזור למשתנים המקוריים ונקבל:

$$\frac{y-x+3}{(y+x+1)^3} = C$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$C = \frac{1}{9}$$

מכאן נקבל כי:

$$\left(\frac{13}{9}, -\frac{13}{9}\right)$$

שאלה 9:

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$x \cdot y' - 4y = -6x^2 y^2$$

הפתרון העובר דרך הנקודה $(1,1)$ עובר גם דרך הנקודה:

א. $(2,2)$
ב. $\left(e^{-2}, -e^{-2}\right)$
ג. $(1,2)$
ד. $(-7,4)$
ה. $\left(3, \frac{1}{9}\right)$

פתרון:

$$x \cdot y' - 4y = -6x^2 y^2$$
$$y' - \tfrac{4}{x} y = -6xy^2$$

מדובר במשוואת ברנולי.
נבצע הצבה:

$$v \equiv y^{-1} \rightarrow v' = -y^{-2} y'$$

נציב זאת במשוואה הנתונה ונקבל:

$$v' + \tfrac{4}{x} v = 6x$$

נפתור את המשוואה הנתונה ונחזור למשתנים המקוריים ונקבל:

$$y = \frac{x^4}{x^6 + C}$$

נציב תנאי התחלה ונקבל: $C = 0$.

כלומר הפתרון הוא: $y = x^{-2}$

ולכן הנקודה היא: $\left(3, \frac{1}{9}\right)$